数理解析研究所講究録
726 巻 1990 年 83-89

On Equilibrium Point and ε-Equilibrium Point in Noncooperative n-Person Game

新潟大 理学部 田中謙輔 (Kensuke Tanaka)
新潟大 自然科学 横山一憲 (Kazunori Yokoyama)

非協力n人ゲームに対して，ε－平衡点に関するいくつかの命題を導く。よく知られているように，平衡点（Nashの平衡点[5]）の存在定理（[1][2]を参照）では，コンパクト性などの強い仮定を必要とするが，我々は，このような仮定なしに，ε－平衡点を用いて，平衡点の存在を示す。

1. 序

ゲーム (N, X, F) を次のように設定する。（[1][2]を参照）

$N \equiv \{1, 2, \cdots, n\}$: n人のplayerの集合

U^i $(i=1,2,\cdots,n)$: Banach空間

$X^i \subset U^i$ $(i=1,2,\cdots,n)$: player i の戦略空間

$x \triangleq (x^1,x^2,\cdots,x^n) \in X$ $(\triangleq \prod_{i=1}^{n} X^i)$: n人のplayerの戦略

$f^i : X \to \mathbb{R}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ player i の損失関数

$F \triangleq (f^1,f^2,\cdots,f^n) : X \to \mathbb{R}^n$

注意　以下, $\forall i \in N$, $\inf_{x \in X} f^i(x) > -\infty$ と仮定する。

定義　$x \in X$: (N,X,F) の ε－平衡点 (ε-equilibrium point) であるとは,

$$\forall i \in N, \quad f^i(x) \leq \inf_{\substack{y \in X \\ \pi^{\hat{i}} y = x^{\hat{i}}}} f^i(y) + \varepsilon$$

但し,

$$\pi^{\hat{i}} : X \to \prod_{j \neq i} X^j \qquad \hat{i} \triangleq N - i$$

注意　$\varepsilon = 0$ のとき, ε－平衡点は, 平衡点(Nashの平衡点)となる。

また, $\varepsilon = 0$, $n = 2$, $f^1(x) = -f^2(x)$ $\forall x \in X$ のときゲーム (N,X,F) は, 二人ゼロ和ゲームとなり, ε－平衡点は, saddle point となる。

2. 平衡点および ε－平衡点の特徴づけ

定義 $\varphi : X \times X \to \mathbb{R}$ を $\varphi(x, y) \equiv \sum_{i=1}^{n} [f^i(x) - f^i(y^i, x^{\hat{i}})]$ と定義する。

φ を用いて，ε－平衡点であるための必要条件，十分条件を示す。

命題1 $\bar{x} \in X$, $\sup_{y \in X} \varphi(\bar{x}, y) \leq \varepsilon \Rightarrow \bar{x}$: ε－平衡点

命題2 $\bar{x} \in X$: ε－平衡点 $\Rightarrow \sup_{y \in X} \varphi(\bar{x}, y) \leq n\varepsilon$

次に，conjugate function，ε－subdifferential を用いて ε－平衡点の特徴づけを行う。

命題3 $\bar{x} \in X$: ε－平衡点，$\forall i \in N \ X^i = U^i$

$\Rightarrow$

$\forall i \in N \ \bar{x}^i \in \partial_\varepsilon f^{i*}(0; \bar{x}^{\hat{i}})$

但し，

$\forall p_i \in U^{i*} \quad f^{i*}(p_i; x^{\hat{i}}) \equiv \sup_{\pi^{\hat{i}} y = x^{\hat{i}}} [\langle p_i, y^i \rangle - f^i(y^i, x^{\hat{i}})]$

命題4 $\forall i \in N \quad y^i \in U^i \longmapsto f^i(y^i, \bar{x}^{\hat{i}})$: convex，下半連続

$\forall i \in N \quad \bar{x}^i \in \partial_\varepsilon f^{i*}(0; \bar{x}^{\hat{i}})$

$\bar{x} \in X$

$\Rightarrow$

$\bar{x}$; ε − 平衡点

ここで，我々は，$\forall i \in N$ $X^i = U^i$: 回帰的のとき，J.M.Borwein [3] の結果を適用し，ε − 平衡点を用いて，平衡点の存在を示す。

命題5 $\forall i \in N$ $X^i = U^i$: 回帰的

$\bar{x} = (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \cdots, \bar{x}^n) \in X$: ε − 平衡点，$\varepsilon > 0$

$\forall i \in N$ $y^i \in U^i \longmapsto f^i(y^i, \bar{x}^{\hat{i}})$: convex，下半連続

$\Rightarrow$

$\exists \tilde{x}_\varepsilon = (\tilde{x}^1_\varepsilon, \tilde{x}^2_\varepsilon, \cdots, \tilde{x}^n_\varepsilon) \in X$ $\tilde{x}^*_\varepsilon = (\tilde{x}^{1*}_\varepsilon, \tilde{x}^{2*}_\varepsilon, \cdots \tilde{x}^{n*}_\varepsilon) \in \prod_{i=1}^{n} U^{i*}$

s.t. $\forall i \in N$ $\|\tilde{x}^i_\varepsilon - \bar{x}^i\| \leq \sqrt{\varepsilon}$ $\|\tilde{x}^{i*}_\varepsilon\| \leq \sqrt{\varepsilon}$

$\tilde{x}_\varepsilon$: ゲーム $(N, X, \bar{F})$ の平衡点

但し，

$\bar{F} = (\bar{f}^1, \bar{f}^2, \cdots, \bar{f}^n) : X \to \mathbb{R}^n$

$\forall i \in N$，$x \in X$，$\bar{f}^i(x) \equiv f^i(x^i, \bar{x}^{\hat{i}}) - \langle \tilde{x}^{i*}_\varepsilon, x^i \rangle$

注意．$\forall i \in N$ $y^i \in U^i \longmapsto f^i(y^i, \bar{x}^{\hat{i}})$: convex であるので，特別な場合を除いて，Lipschitz となる。([6] を参照)

故に，命題5は，「ε－平衡点を捜すと，その近くで損失の殆ど変わらないゲームの平衡点を見つけることができる。」ことを示している。

3. 微分可能条件の下での平衡点およびε－平衡点の特徴づけ

微分可能条件の下でEkelandのvariational principle [4]を用いると，ε－平衡点であるための必要条件が示される。

命題6　$\forall i \in N \quad X^i$: closed

$\bar{x} = (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n) \in \mathrm{int}\, X$: ε－平衡点，$\varepsilon > 0$

$\forall i \in N \quad y^i \in U^i \longmapsto f^i(y^i, \bar{x}^{\hat{i}})$: Gâteaux微分可能

$\Rightarrow$

$\exists \tilde{x} = (\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \ldots, \tilde{x}^n) \in X$

s.t. $\|\tilde{x} - \bar{x}\| \leq n\sqrt{\varepsilon}$，$\forall i \in N \quad \|D_i f^i(\tilde{x}^i, \tilde{x}^{\hat{i}})\| \leq \sqrt{\varepsilon}$

f^iの微分可能性の仮定を取り除いて次の命題を導く。

命題7　$\forall i \in N \quad X^i$: closed

$\bar{x} = (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n) \in \mathrm{int}\, X$: 平衡点，$\varepsilon > 0$

$$\exists \text{ Gâteaux differentiable function } f^i_\varepsilon(\cdot, \bar{x}^{\hat{i}})$$

$$\text{s.t. } f^i_\varepsilon(y^i, \bar{x}^{\hat{i}}) \le f^i(y^i, \bar{x}^{\hat{i}}) \text{ for all } y^i \in X^i$$

$$\inf_{y^i \in X^i} f^i_\varepsilon(y^i, \bar{x}^{\hat{i}}) \geqq \inf_{y^i \in X^i} f^i(y^i, \bar{x}^{\hat{i}}) - \varepsilon$$

$$D_i f^i_\varepsilon(y^i; \bar{x}^{\hat{i}}) \longrightarrow \Phi^i(\bar{x}) \quad \text{as } \varepsilon \to 0 \quad y^i \to \bar{x}^i$$

$\Rightarrow$

$$\forall i \in N \quad \Phi^i(\bar{x}) = 0 \quad \text{in } U^{i*}$$

convex性の仮定を付け加えて，次の命題を示す。

命題8 $\forall i \in N \quad y^i \in U^i \longmapsto f^i(y^i, \bar{x}^{\hat{i}})$: convex

$\forall i \in N \quad \| D_i f^i(\bar{x}) \| \le \varepsilon$

$\Rightarrow$

$$\forall i \in N \quad f^i(\bar{x}) \le f^i(y^i, \bar{x}^{\hat{i}}) + \varepsilon \| y^i - \bar{x}^i \| \quad \text{for all } y^i \in U^i$$

参考文献 [1] J.P. Aubin, Mathematical Methods of Game and Economic Theory. North Holland Amsterdam (1979)

[2] J.P. Aubin and I. Ekeland, Applied Nonlinear Analysis. Wiley-Interscience (1984)

[3] J.M. Borwein, "A note on ε-subgradients and maximal monotonicity." Pac. J. Math.

Vol. 103, No. 2, 307–314 (1982)

[4] I. Ekeland, "Nonconvex minimization problems," Bull. Am. Math. Soc. (2) 1, 443–474 (1979)

[5] J. Nash, "Equilibrium points in n-person games," Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 36 (1950)

[6] A.W. Roberts and D.E. Varberg, "Another proof that convex functions are locally Lipschitz," Am. Math. Mon. 81, 1014–1016 (1974)